9/4/2019

▶ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ

Πρόβλημα Δοθείσης συνάρτησης f ολοκληρώσιμης κατά Riemann στο $[-1,1]$ και συνάρτησης βάρους w θετικής στο $[-1,1]$ εκτός από πεπερασμένο σύνολο σημείων όπου $w(x)=0$, να βρεθεί πολυώνυμο $q_1^* \in P_m$, τέτοιο ώστε:

$$\|f-q^*\|_2 = \left(\int_{-1}^{1} (f(x)-q(x))^2 w(x)dx\right)^{1/2} \leq \|f-p\|, \forall p \in P_m.$$

Δοθείσης συνάρτησης f ορισμένης στο $X_m = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ και συνάρτησης βάρους w, θετικής στο X_m, να βρεθεί πολυώνυμο $q^* \in P_m$, τέτοια ώστε:

$$\|f-q^*\|_2 = \sum_{i=1}^{m} f(x_i)-q^*(x_i)^2 w(x_i) \leq \|f-p\|_2 , \forall p \in P_m$$

Υπάρχει η ΠΕΤ επειδή ο χώρος P_m είναι π.ε.π. διάστασης που είναι μοναδικός επειδή η $\|\cdot\|_2$ είναι αυστηρά κυρτή.

- Έστω $f, g \in C[-1,1]$, και w συνάρτηση βάρους, ορίζουμε ως εσωτερικό γινόμενο:

$$(f,g) = \int_{-1}^{1} f(x) g(x) w(x) dx.$$

Έστω f, g ορισμένες στο X_m και w συνάρτηση βάρους ορίζουμε ως εσωτερικό γινόμενο:

$$(f,g) = \sum_{i=1}^{m} f(x_i) g(x_i) w(x_i)$$

$(f,g)=(g,f)$

$(\lambda f,g)=\lambda(f,g)$

$(f,\lambda g)=\lambda(f,g)$.

$(f+h,g)=(f,g)+(h,g)$

$(f,g+h)=(f,g)+(f,h)$

$(f,f)=\|f\|_2$

▶ Δυο συναρτήσεις f,g λεγονται <u>ορθογώνιες</u>, ως προς τη συνάρτηση βάρους w, αν $(f,g)=0$.

↝ Χαρακτηρισμός προσεγγισης ελαχίστων τετραγώνων

<u>Θεώρημα</u>: Έστω f ολοκληρωσιμη στο $[-1,1]$ και w συνάρτηση βάρους. Το πολυώνυμο $q^* \in P_n$ είναι προσεγγ. ελ. τετρ. της f στον P_n, ανν:

$$(f-q^*,p)=0, \ \forall p \in P_n \quad (*).$$

<u>Απόδειξη</u>

($\Leftarrow$) Έστω η (*) ισχύει για ένα $q^* \in P_n$ και $p \in P_n$ ένα οποιοδήποτε πολυώνυμο στον P_n.

Μέθοδος του συστήματος των κανονικών εξισώσεων

Επιλέγουμε ως βάση το σύνολο των μονωνύμων $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$

Το q^* γράφεται ως $q^* = \xi_0 + \xi_1 \cdot x + \xi_2 x^2 + \dots + \xi_n x^n$

$$(f - q^*, p) = 0 \iff (f, p) - (q^*, p) = 0$$

$$\iff (q^*, p) = (f, p)$$

$$(q^*, x^i) = (f, x^i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

$$\iff (\xi_0 + \xi_1 + \xi_2 x^2 + \dots + \xi_n x^n, x^i) = (f, x^i) \iff$$

$$(1, x^i)\xi_0 + (x, x^i)\xi_1 + (x^2, x^i)\xi_2 + \dots + (x^n, x^i)\cdot \xi_n = (f, x^i), \ i = 0,1,2,\dots,n$$

$\iff A \cdot \xi = b$, όπου $A \in \mathbb{R}^{n+1, n+1}$, $a_{ij} = (x^j, x^i) = \int_{-1}^{1} x^{i+j}\, dx$,

$i, j = 0, 1, 2, \dots, n$

$b, \xi \in \mathbb{R}^{n+1}$, $b_i = (f, x^i)$

$$A = \begin{bmatrix} (1,1) & (x,1) & (x^2,1) & \cdots & (x^n,1) \\ (1,x) & (x,x) & (x^2,x) & \cdots & (x^n,x) \\ (1,x^n) & (x,x^n) & (x^2,x^n) & \cdots & (x^n,x^n) \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} (f,1) \\ (f,x) \\ (f,x^n) \end{bmatrix}$$

$$(x^j, x^i) = (x^k, x^l), \quad \text{αν } j + i = k + l.$$

Ο A είναι ένας πίνακας Hankel, υπολογίζουμε $2n+1$ ολοκληρώματα. Οι πίνακες Hankel που παράγονται, έχουν κακή κατάσταση

$k_2(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ είναι πολύ μεγάλος.

Η λύση δεν είναι αξιόπιστη.

Τότε,

$$\|f-p\|_2^2 = (f-p, f-p) = (f-q^* + q^* - p, f-q^* + q^* - p)$$

$$= (f-q^*, f-q^*) + 2(f-q^*, q^*-p) + (q^*-p, q^*-p) =$$

$$= \|f-q^*\|_2^2 + \|q^*-p\|_2^2$$

$$\|f-q^*\|_2 \leq \|f-p\|_2 .$$

(=>) Έστω ότι $q^* \in P_m$ είναι Π.Ε.Τ. της f στον P_m, και ότι δεν ισχύει η $(*)$, δηλαδή υπάρχει $\bar{p} \in P_m$, τ.ω. $(f-q^*, \bar{p}) = a \neq 0$. Έστω $b = (\bar{p}, \bar{p}) > 0$.

Ορίζουμε με $\lambda = \frac{a}{b} \neq 0$ και το πολυώνυμο $p = q^* + \lambda \cdot \bar{p} \in P_m$

$$\|f-p\|_2^2 = (f-p, f-p) = (f-(q^*+\lambda \cdot \bar{p}), f-(q^*+\lambda \bar{p})) =$$
$$= (f-q^*, f-q^*) + 2(f-q^*, \lambda \bar{p}) + (\lambda \cdot \bar{p}, \lambda \bar{p})$$
$$= \|f-q^*\|_2^2 - 2\lambda a + \lambda^2 b = \|f-q^*\|_2^2 - \lambda^2 b$$
$$a=\lambda b \quad = \|f-q^*\|^2 - \lambda^2 b < \|f-q^*\|_2^2 \quad \text{ΑΤΟΠΟ}$$

$$\int_{-1}^{1} (f(x) - q^*(x)) p(x)\, w(x) dx = 0$$

$$\sum_{i=1}^{m} (f(x_i) - q^*(x_i))\, p(x_i) \cdot w(x_i) = 0$$

- Για την εύρεση του q^*, αρκεί να επιλέξουμε μια βάση $\{p_0, p_1, \ldots, p_m\}$ του P_m και να απαιτήσουμε να ισχύει η $(*)$, όπου p_i ένα πολυώνυμο της βάσης

Άσκηση 1:

Δίνεται ότι $f_1, f_2 \in C[a,b]$ είναι ορθογώνιες μεταξύ τους.

Να αποδειχθεί η σχέση

Λύση:

$$\| f_1 + f_2 \|_2^2 = \| f_1 \|_2^2 + \| f_2 \|_2^2$$

$$\| f_1 + f_2 \|_2^2 = (f_1 + f_2, f_1 + f_2) = (f_1, f_1) + 2(f_1, f_2) + (f_2, f_2) =$$

$$= \| f_1 \|^2 + \| f_2 \|^2.$$

Άσκηση 2:

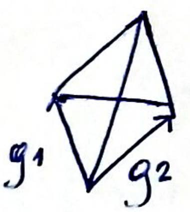
Δίνονται οι συναρτήσεις $g_1, g_2 \in C[a,b]$ κανονικοποιημένες.

$\|g_1\|_2 = \|g_2\| = 1$, Να αποδειχτεί ότι οι $g_1 + g_2$ και $g_1 - g_2$ είναι ορθογώνιες.

Λύση:

$$(g_1 + g_2, g_1 - g_2) = (g_1, g_1) - \cancel{(g_1, g_2)} + \cancel{(g_2, g_1)} - (g_2, g_2) =$$

$$= \|g_1\|_2^2 - \|g_2\|_2^2 = 1 - 1 = 0.$$



Άσκηση 3:

Να βρεθεί η Π.Ε.Τ. της x^3 ορισμένης στο $[0,1]$ στον P_2.

Λύση:

$$a_{00} = (1, 1) = \int_0^1 1 \, dx = [x]_0^1 = 1$$

$$a_{01} = a_{10} = \int_0^1 x \, dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$a_{02} = a_{11} = a_{20} = \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$a_{12} = a_{21} = \int_0^1 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{4}.$$

$$a_{22} = \int_0^1 x^4 dx = \left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{5}$$

$$b_0 = (x^3, 1) = \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}$$

$$b_1 = (x^3, x) = \int_0^1 x^4 dx = \frac{1}{5}$$

$$b_2 = (x^3, x^2) = \int_0^1 x^5 dx = \frac{1}{6}$$

$$\begin{array}{c} \\ 1/2 \\ 1/3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \underline{1} & 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} \underline{1/12} & 1/12 & 3/40 \\ 1/12 & 4/45 & 1/12 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{c|c} \frac{1}{180} & \frac{1}{120} \end{array}\right)$$

$$\frac{1}{20} \qquad -\frac{3}{5} \qquad \frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{4} - \left(-\frac{3}{5}\right)\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\,\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{3}{10} - \frac{1}{2} = \frac{5+6-10}{20} = \frac{1}{20}$$

$$q^* = \frac{1}{20} - \frac{3}{5}x + \frac{3}{2}x^2$$

Άσκηση 4:

Να βρεθεί η π.Ε.Τ. της $f(x) = \begin{cases} 1+x, & x \in [-1,0] \\ 1-x, & x \in [0,1] \end{cases}$

ορισμένη στο $[-1,1]$ στον P_2.

Λύση: $a_0 = (1,1) = \int_{-1}^{1} 1\,dx = [x]_{-1}^{1} = 2$

$$a_{10} = \int_{-1}^{1} x\,dx = 0$$

$$a_{20} = \int_{-1}^{1} x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3}$$

$$a_{21} = \int_{-1}^{1} x^3 dx = 0$$

$$a_{22} = \int_{-1}^{1} x^4 dx = \left[\frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{5}.$$

$$b_0 = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} (1+x)\,dx + \int_{0}^{1} (1-x)\,dx =$$

$$= \left[x + \frac{x^2}{2}\right]_{1}^{0} + \left[x - \frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1} = 1 - \frac{1}{2}$$

$$b_1 = \int_{-1}^{1} f(x)\,x\,dx = \ldots = 0$$

$$b_2 = \int_{-1}^{1} x^2 \cdot f(x)\,dx = \ldots = 1/6$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2/3 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 2/3 & 0 & 2/5 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1/6 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 2/3 & 1 \\ 0 & 2/3 & 0 & 0 \\ 2/3 & 0 & 2/5 & 1/6 \end{array}\right) \Leftrightarrow \frac{2}{3} \cdot \xi_1 = 0 \Rightarrow \xi_1 = 0$$

και

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2/3 & 1 \\ 2/3 & 2/5 & 1/6 \end{array}\right) \begin{array}{l} \rightsquigarrow \xi_0 \\ \rightsquigarrow \xi_2 \end{array}$$